

Il campo complesso $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ è la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$.

$\forall p(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ deg } p(x) \geq 1 \exists \lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0$

$\Rightarrow \forall p(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ ha } \text{deg } p(x) \text{ radici in } \mathbb{C}$
 $\text{deg } p(x) \geq 1$

DIAGONALIZZARE una Matrice: $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

- 1) $\Sigma m_{\lambda}(\lambda) = n \rightarrow$ il polinomio caratteristico di A è un polinomio di grado n .
- 2) $\forall \lambda \in \text{Spec}(A) : m_{\lambda}(\lambda) = m_{\lambda}(\lambda)$.

La condizione (2) è sempre soddisfatta se $\mathbb{K}$ alg. chiusa
(in particolare $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda^2 + 1)$$

Non ci sono autovalori reali!

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = +i$ sono autovalori di A' .

$\Rightarrow A'$ è diag. e simile alla matrice

$$\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & +i \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{R}^{n,n} \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$$

N.B. A' non ha autovettori reali!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 \Rightarrow m_a(1) = 2$$

$$rk(A - I) = rk\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow m_g(1) = 2 - 1 = 1$$

• forme canoniche per matrici non diagonalizzabili.

→ Vogliamo classificare gli endomorfismi $f: V_n \rightarrow V_n$ lineari mediante matrici.

→ matrici simili descrivono lo stesso endomorfismo rispetto basi differenti

→ rappresentanti per la stessa similitudine di matrici.

→ Se la matrice di una classe non è diagonalizzabile
⇒ il rappresentante è una matrice diagonale.
che appartiene alla stessa classe.

$$\text{Se } \exists D: P^{-1}AP = D \Rightarrow [A] = [D]$$

→ se la matrice non può essere diagonalizzata ⇒

⇒ Forme CANONICHE.

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \rightarrow$ FORMA CANONICA DI JORDAN.

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ è simile ad una matrice diagonale a blocchi ove i singoli blocchi sono della forma

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

ove i λ sono autovalori di A .

N.B.:

$J_k(\lambda_0)$ è una matrice $k \times k$ con

λ_0 autore di $m_a(\lambda_0) = k$

$m_g(\lambda_0) = 1$

Exercício: Se seja uma matriz 4×4 com valores:

$$1 \text{ e } 2 \text{ di } m_a(1)=2 \quad m_g(1)=2$$

$$m_a(2)=2 \quad m_g(2)=1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$m_a(1)=2 \quad m_g(1)=1$$

$$m_a(2)=2 \quad m_g(2)=1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$m_a(1)=3 \quad \text{e non dig.}$$

$$m_a(2)=1$$

$$\Rightarrow m_g(2)=1$$

$$m_g(1) \in \{1, 2\}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & 2 \end{array} \right]$$

$$m_g(1)=1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 2 \end{array} \right]$$

$$m_g(1)=2$$

Matrici reali e simmetriche.

Teorema spettrale: Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con ${}^T A = A$.

Allora tutti gli autovalori di A sono reali.

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} m_A(\lambda) = n$$

Teorema della base spettrale: Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile cioè $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} A P = D$ con $P^{-1} = {}^T P$ se e solamente se $A = {}^T A$ cioè A è simmetrica.

a) $\forall \lambda \in \text{Spec}(A) : m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

b) La matrice diagonalizzante è ortogonale.

daunque $D = P^{-1}AP \Rightarrow \underline{D = {}^T P A P}$

^T In particolare un prod. scalare di matrice A si può rappresentare rispetto una opportuna base B in forma diagonale. Le entrate di D sono gli autovalori di A .

DIM del teorema spettrale.

Troviamo un autovalore $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ e mostriamo che è autovalore su $\mathbb{R}$ cioè che $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$.

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e ${}^T A = A$. Possiamo vedere $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

ed in $\mathbb{C}$ il polinomio caratteristico di A ha n radici.

Sia $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ un autovalore (complesso) di A e sia

$X_0 \in \mathbb{C}^n$ un autovettore di A tale che

$$AX_0 = \lambda_0 X_0, \quad X_0 \neq \underline{0}.$$

$$\lambda_0^T X_0 \bar{X}_0 = {}^T(\lambda_0 X_0) \bar{X}_0 = {}^T(AX_0) \bar{X}_0 =$$

$$= {}^T X_0 {}^T A \bar{X}_0 = {}^T X_0 (A \bar{X}_0) = {}^T X_0 (\bar{A} \bar{X}_0) =$$

$$\textcolor{red}{{}^T A = A} \quad \textcolor{red}{\bar{A} = A}$$

$$= {}^T X_0 (\overline{AX_0}) = {}^T X_0 \bar{\lambda}_0 \bar{X}_0 = \bar{\lambda}_0 {}^T X_0 \bar{X}_0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0) {}^T X_0 \bar{X}_0 = 0 \quad \text{ma } {}^T X_0 \bar{X}_0 = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \neq 0$$

$$\text{e } X_0 \neq \underline{0} \Rightarrow \lambda_0 = \bar{\lambda}_0 \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R} \quad \square$$

DM Theorems have spectral.

A orthogonal matrix diag. $\Rightarrow A = A^T$
 $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\Downarrow$

$\exists P: P^{-1} = P^T$ e $P^{-1}AP = D$ D diagonale.

$$^T(P^{-1}AP) = ^TP = D = D$$

"

$$(P^T A^T P^{-1}) = (P^{-T} A^T P).$$

$$P^{-1T} A^T P = P^{-T} A^T P \text{ con } P \text{ invertibile.}$$

$$P(P^{-1T} A^T P) = P(P^{-1} A^T P) \Rightarrow ^T A^T P = A^T P$$

$$(^T A P) P^{-1} = (A P) P^{-1} \Rightarrow ^T A = A$$

□

viceversa:

$$H_P: A = {}^t A; A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

$$\exists: \exists P \text{ con } {}^t P = P^{-1} \text{ tale che } P^{-1} A P = D$$

$\text{PecC}(n, \mathbb{R})$.

per: Dij di matrici

$$\begin{aligned} \bullet \quad n=1 &\Rightarrow A = (a_{11}) & A = {}^t A & P = (1): P^{-1} = P = {}^t P \\ & & P^{-1} A P &= (a_{11}) \quad \text{DUG.} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad (n-1) \Rightarrow n$$

Siccome A reale e simmetrica, A ammette almeno un autovettore X_0 reale e via $X_0 \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di autovettore X_0 . $X_0 \neq 0 \Rightarrow$ è sempre possibile

completare (X_0) ad una base $(X_0, Y_1, \dots, Y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ ortogonale rispetto al prodotto scalare std.
 orth

e poi normalizzare tutti i vettori.

$$Q' = (x'_0 \ y'_1 \dots \ y'_n)$$

base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale con $x'_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$
autovettore di A di autovalore λ_0 .

pongo $P_0 = [x'_0 \ y'_1 \dots \ y'_n]$ matrice che ha
i vettori di Q' come ~~componenti~~ colonne.

$P_0^{-1} = {}^t P_0$ in quanto i vettori di Q' sono un
insieme ortonormale.

$$P_0^{-1} A P_0 = {}^t P_0 A P_0 = \begin{bmatrix} x'_0 & y'_1 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x'_0 & y'_1 & \dots & y'_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} X_0' A X_0 & X_0' A Y_1 & \dots & X_0' A Y_n \\ Y_1' A X_0 & Y_1' A Y_1 & \dots & Y_1' A Y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_n' A X_0 & Y_n' A Y_1 & \dots & Y_n' A Y_n \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{aligned} A X_0 &= \lambda_0 X_0' \\ (X_0' A) &= \\ &= (A X_0)' = \\ &= \lambda_0' X_0' \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_0 X_0' X_0 & \lambda_0 X_0' Y_1 & \dots & \lambda_0 X_0' Y_n \\ \lambda_0 Y_1' X_0 & \lambda_0 Y_1' Y_1 & \dots & \lambda_0 Y_1' Y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0 Y_n' X_0 & \lambda_0 Y_n' Y_1 & \dots & \lambda_0 Y_n' Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} X_0' X_0 &= 1 \\ X_0' Y_i &= 0 \\ Y_i' X_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ 0 & & \boxed{A_1} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

OSS: $A_1 \in \mathbb{R}^{n-1, n-1}$

${}^T A_1 = A_1$ in fatti:

$$P_0^{-1} A P_0 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right]$$

$$\text{ma } {}^T(P_0^{-1} A P_0) = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & {}^T A_1 \end{array} \right]$$

D'altrò canto

$${}^T(P_0^{-1} A P_0) = {}^T({}^T P_0 A P_0) = ({}^T P_0 {}^T A P_0) =$$

$$= ({}^T P_0 A P_0) = P_0^{-1} A P_0$$

$$\Rightarrow A_1 = {}^T A_1$$

per ipotesi induttiva $\exists P_1' \in \mathbb{R}^{n-1, n-1}$ tale che

$$P_1'^T = (P_1')^{-1} \text{ e } P_1' A_1 P_1' = D_1$$

con D_1 matrice diagonale.

Pongo

$$P_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & P_1' \end{array} \right]$$

e considero ora

$$P = P_0 P_1$$

$$P^T A P = P_1^T \left[P_0^T A P_0 \right] P_1 = P_1^T P_1 \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{array} \right] P_1 =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 & 0 \\ 0 & P_1^T A_1 P_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 & 0 \\ 0 & D_1 \end{array} \right]$$

DIAGONALE!

$${}^t P P = {}^t (P_0 P_2) (P_0 P_2) = {}^t P_2 {}^t P_0 P_0 P_2 =$$

$$= {}^t P_2 P_0^{-1} P_0 P_2 =$$

$$= {}^t P_2 P_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ \hline {}^t P_2 P_2 \end{bmatrix} = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^t P = P^{-1} \text{ e dunque } P \text{ ortogonale}$$

□

Teorema: Sia $V_n(\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

e sia $*$ un prodotto scalare su $V_n(\mathbb{R})$.

Allora esiste una base $\tilde{B}$ di $V_n(\mathbb{R})$ tale che la matrice rappresentativa di $*$ rispetto a $\tilde{B}$ sia diagonale e contiene solamente elementi dell'insieme

$\{-1, 0, +1\}$.

Il numero di $\pm 1, 0, +1$ determina la segnetura del prod. scalare e corrisponde al numero di autovalori negativi, nulli o positivi di una qualsiasi matrice rappresentativa di $*$.
Essa classifica i prodotti scalari reali.

Dim:

$*$ è un prodotto scalare. Sia B una base di $V_n(\mathbb{R}) \Rightarrow *$ è rappresentato rispetto a B da una matrice A reale e simmetrica.

$\Rightarrow$ per il th. della base spettrale $\exists B'$ base di

$V_n(\mathbb{R})$ in cui $*$ è rapp. da una matrice diagonale

D. Infatti $P^{-1}AP = D$ con P ortogonale $\Rightarrow$

$${}^t P A P = D \Rightarrow$$

D rappresenta * rispetto la base descritta da P .
Sia $OB' = (P_1 \dots P_n)$ la base i cui vettori sono
le colonne di P e poniamo

$$OB'' = (P_1'' \dots P_n'')$$

con $P_i'' = P_i$ se $P_i * P_i = 0$

$$P_i'' = \frac{1}{\sqrt{P_i * P_i}} P_i \text{ se } P_i * P_i \neq 0$$

$\Rightarrow$ la matrice di * rispetto OB'' ha le proprietà
richieste.

□

oss: * è definito positivo $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori di A sono > 0
 $\Leftrightarrow$ segnatura $(+++++)$.

* è definito negativo $\Leftrightarrow$ segnatura $(- \dots -)$

* è degenere $\Leftrightarrow \text{rk}(A) < n \Leftrightarrow$ la segnatura contiene degli 0.

possibili prodotti scalari su $\mathbb{R}^3$.

$(+++)$ $\rangle$ definito $\langle$ positivo
 $(---)$ $\rangle$ definito $\langle$ negativo

$(++-)$ $\rangle$ indefinito
 $(--+)$ $\rangle$ indefinito

$(++0)$ $\rangle$
 $(--0)$ $\rangle$
 $(+-0)$ $\rangle$
 $(+00)$ $\rangle$
 (-00) $\rangle$
 (000) $\rangle$

} degenere

In $\mathbb{R}^4$

$(++++)$ Euclideo

$(+++-)$
 $(---+)$